双层薄膜与弹性梯度基底三层结构表面失稳分析

许超[1],王博[1],毕皓皓[2],师岩[3],邓子辰[1,4]

(1. 西北工业大学工程力学系,710072 西安;2. 西北工业大学应用数学系,710072 西安;
3. 南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,210016 南京;
4. 西北工业大学复杂系统动力学与控制工信部重点实验室,710072 西安)

摘　要:硬薄膜/软基底结构的表面失稳问题一直是柔性电子器件的难题,基于此,本文考虑了双层结构与弹性梯度基底间的界面剪切力,建立了双层薄膜/弹性梯度基底模型;利用位移协调条件,理论推导得到了双层薄膜/弹性梯度基底结构的临界应变和失稳波长的表达式并通过有限元仿真,验证了本研究解析解的有效性。在此基础上,应用此解析解进一步研究了弹性梯度基底的材料、双层薄膜结构厚度比等参数对临界应变和波长的影响。结果表明:减小器件层的厚度或者增加封装层的厚度,可以提高双层膜/弹性梯度基底结构的稳定性;当弹性梯度材料基底表面"较软"或器件层"较硬"时,器件层与基底界面的剪切力的影响较大,可以提升三层膜/基结构抵抗界面破坏的能力。本研究成果将为硬薄膜/弹性梯度基底结构的柔性电子器件的制备提供理论支撑。

关键词:双层薄膜/弹性梯度基底结构;屈曲理论;临界应变;柔性电子

中图分类号:O343　　**文献标志码**:A

chinaXiv:202303.00354v1

Instability analysis of bi-layer films bonded to elastic graded substrate subjected to a compressive force

XU Chao[1],WANG Bo[1],BI Haohao[2],SHI Yan[3],DENG Zichen[1,4]

(1. Department of Engineering Mechanics,Northwestern Polytechnical University,710072 Xi'an,China;
2. Department of Applied Mathematics,Northwestern Polytechnical University,710072 Xi'an,China;3. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,210016 Nanjing,China;4. Ministry of Industry and Information Technology Key Laboratory of Dynamics and Control of Complex Systems,Northwestern Polytechnical University,710072 Xi'an,China)

Abstract:Surface instability of hard films adhered on soft substrate has always been a difficult problem for flexible electronic devices. Considering the shear stress between the bi-layer film and the elastic graded substrate,an analytical model of bi-layer film/elastic graded substrate is established. By using the displacement continuity of the interface,the analytical expressions of the critical strain and wavelength of the bi-layer film/elastic graded substrate are obtained. Then,through several examples,the validities of the proposed expressions are verified which are compared with those results obtained by the finite element a-

收稿日期:2021-06-01　　**修回日期**:2022-06-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11802319);机械结构力学及控制国家重点实验室开放课题资助项目(No. MCMS-E-0221K01)

通信作者:王博,副教授。E-mail: bowang@nwpu.edu.cn

引用格式:许超,王博,毕皓皓,等. 双层薄膜与弹性梯度基底三层结构表面失稳分析[J]. 应用力学学报,2023,40(1):154-161.
XU Chao,WANG Bo,BI Haohao,et al. Instability analysis of bi-layer films bonded to elastic graded substrate subjected to a compressive force[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(1):154-161.

nalysis. At the same time, the influences of the geometric parameters of the bi-layer film and physical parameters of the elastic graded substrate on the buckling behavior are analyzed. The results in this paper show that decreasing the thickness of device layer or increasing the thickness of encapsulation layer can improve the stability of bilayer film/elastic graded substrate structure; if the substrate is relatively "soft" or the device layer is "hard", the shear force of the interface between the device layer and the substrate will be taken into account, which can prevent the resistance of the three-layer film/substrate structure from undergoing interface failure. Above all, the research will provide theoretical support for the fabrication of flexible electronic devices with hard film/elastic graded substrate structure.

Key words: bi-layer film/elastic graded substrate structure; buckling theory; critical strain; flexible electronics

chinaXiv:202303.00035v1

随着科技不断发展,基于硬质薄膜-柔性基底复合结构屈曲原理的柔性电子技术展现出广阔的应用前景[1-3]。基于力学屈曲原理的无机可延展柔性电子技术,既可以保持无机电子器件优异的电学性能,又具备良好的柔韧和可延展性能,凸显出力学在柔性电子研究中扮演的重要角色。近年来,柔性电子的力学研究已得到国内外学者们的广泛关注[4-9],现已成为国际力学领域研究的热点。

目前,对于单层薄膜/软基底结构,HUANG 等[10]借助能量变分原理研究了任意厚度软基底上薄膜的屈曲行为,并应用谱方法数值模拟了薄膜的面内失稳形貌,给出了临界应变、失稳波长和波幅与弹性模量和基底厚度的函数解析式。HUANG[11]通过线性摄动分析,推广研究了黏弹性基底上弹性薄膜的起皱过程,揭示了薄膜在不同压缩载荷水平下的不同褶皱生长形态。针对在双轴压缩载荷作用下膜/基系统出现不同的失稳模式,CHEN 等[12]和 AUDOLY 等[13-15]的研究指出,过应力较大时,人字形模式能量最低;过应力较小时,四方模式能量最低。借助上限法,CAI 等[16]研究了在双轴压缩载荷作用下存在初始曲率的球面膜基系统的形貌演化问题。上述工作从理论分析、数值模拟、实验观察等方面极大的丰富了单层薄膜/软基底结构的屈曲和后屈曲行为研究。

然而,在柔性电子器件的制备中,经常在硅基板表面胶合一层或多层功能器件,如起到保护作用的封装层,由此构成薄膜-基底三层或多层结构。而不同层对于硬质薄膜的等效拉伸模量与等效弯曲模量的影响已经不能用单层薄膜/软基底结构准确解释。针对双层薄膜/基底结构,JIA 等[17-18]通过将双层薄膜整体建模成 Euler 梁或 Timoshenko 梁,建立了第一种起皱模型;通过将中间层和基底建模成复合基底,建立了第二种起皱模型。他们的研究结果表明:在给定的压缩应变下,中间层弹性模量的变化会导致三层结构出现 2 种起皱模式。CHEN 等[19]发现在 JIA 等[17-18]提到的 2 种起皱模式的后屈曲过程中,会出现二次分叉行为,给出了发生二次分叉时中间层弹性模量的上下限。在辛体系下,通过扩展的 Wittrick-Williams 算法,ZHANG[20]预测了层状 neo-Hookean 结构的起皱临界应变和失稳波长。文中结论表明,通过改变中间层的模量,可以产生 2 个波长,即 2 种失稳模式,再次验证了 JIA 等[17-18]的研究工作。上述工作的优势在于重点关注了在工程实际应用中功能器件结构的多层性,分析了中间层材料和几何参数对于失稳参数的关键影响。而不足在于,并未考虑器件工作表面的材料不均匀性。

针对弹性梯度基底上硬质薄膜的表面失稳行为,LEE 等[21]用有限元法研究了对于弹性模量为厚度任意函数的基底上薄膜受到压缩载荷作用的表面失稳行为,并给出屈曲发生的临界载荷和失稳波长。通过将基底建模成两种沿厚度方向具有不同弹性模量的函数,即幂级数和指数级数,CAO 等[22]解析求解了半无限梯度基底上单层硬质薄膜发生起皱的临界压缩应变和失稳波长。此外,CHEN 等[23]通过数值求解四阶微分方程分析了各种材料和几何参数(杨氏模量、厚度、基底材料常数等)对于半无限梯度基底上单层硬质薄膜的屈曲压缩应变和失稳波长的影响,并应用有限元软件模拟了后屈曲形貌演化过程。上述工作的不足在于没有考虑工程实际应用中功能器件结构的多层性。

综上所述,不难发现,对于双层薄膜-弹性梯度三层结构的屈曲行为鲜有关注。基于此,本研究针对无限弹性梯度基底上双层硬质薄膜的屈曲行为进行研究。考虑双层薄膜与弹性梯度基底界面处剪切力,分析弹性模量比、厚度比及梯度基底材料常数等

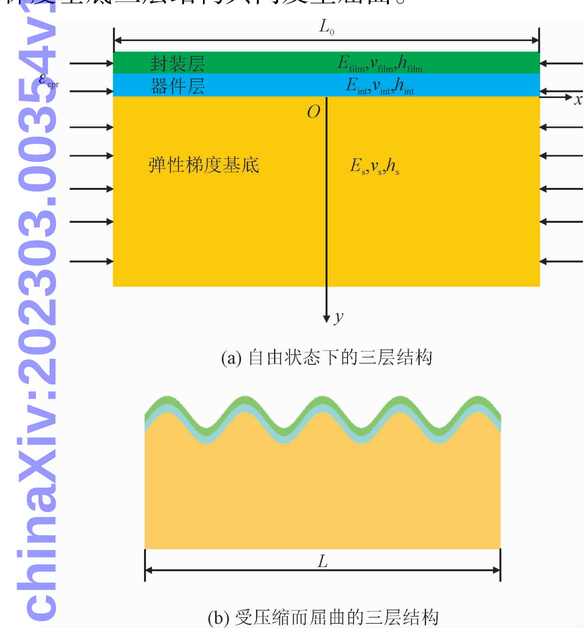
ChinaXiv合作期刊

对三层结构屈曲特性的影响规律。文中所得的主要研究成果将为基于双层硬薄膜/弹性梯度基底结构的柔性电子器件的设计和制备提供理论支持。

1　理论分析

1.1　封装层和器件层的控制方程

考虑如图 1 所示的柔性电子器件，其结构由封装层、器件层和弹性梯度基底层组成。图 1(a)是自由状态下的三层结构；图 1(b)是受到 x 方向单轴外加压缩应变 ε_a 的三层结构，其中 $\varepsilon_a = (L_0 - L)/L_0$。当压缩应变超过某一临界值时，封装层和器件层与梯度基底三层结构共同发生屈曲。



(a) 自由状态下的三层结构

(b) 受压缩而屈曲的三层结构

图 1　双层膜/弹性梯度基底系统的示意图

Fig. 1　Schematic diagram of bilayer films/elastic graded substrate system

本研究有以下 6 点假设[10,13,18,22]：①封装层、器件层及梯度基底间无滑移，即三层结构之间的界面是理想黏结的；②弹性梯度基底的厚度远远大于封装层和器件层的厚度，即基底为半无限大；③弹性梯度基底的弹性模量沿其厚度方向呈幂级数变化，即 $E_s = E_{s0}\bar{y}^{\beta}$，其中 E_{s0} 为基底的杨氏模量系数，β 为无量纲参数，$\bar{y} = y/1$ 经归一化处理；④三层结构厚度远小于失稳波长，梁在厚度方向的应变忽略不计；⑤封装层和器件层组成的复合结构用 von- Karman 非线性梁的理论进行描述，且假设梁的中面位移、应力与基底的表面位移、应力相等；⑥复合梁的等效杨氏模量远大于基底的杨氏模量系数，即复合梁很“硬”，不易变形，基底很“软”，易于变形。如图 1 所示，封装层和器件层的杨氏模量、泊松比和厚度分别为 E_{film} 和 E_{int}、ν_{film} 和 ν_{int}、h_{film} 和 h_{int}；封装层和器件层的平面应变模量分别为 $\bar{E}_{film} = E_{film}/(1 - \nu_{film}^2)$ 和 $\bar{E}_{int} = E_{int}/(1 - \nu_{int}^2)$；弹性梯度基底的弹性模量和泊松比分别为 E_s 和 ν_s；$\bar{E}_{s0} = E_{s0}/(1 - \nu_s^2)$ 为梯度基底平面应变模量。为了后文分析方便，引入无量纲参数：$E_{film}^* = \bar{E}_{film}/\bar{E}_{s0}$，$E_{int}^* = \bar{E}_{int}/\bar{E}_{s0}$，$\bar{E} = E_{int}^*/E_{film}^*$ 和 $\bar{h} = h_{int}/h_{film}$。

根据小变形理论，复合梁中面的正应力 σ_c 和剪切力 τ_c[22,24] 分别为

$$\sigma_c = (\bar{E}_{film}h_{film} + \bar{E}_{int}h_{int})\varepsilon_a\frac{d^2w}{dx^2} - \left[\frac{1 + \bar{E}^2\bar{h}^4 + 2\bar{E}\bar{h}(2\bar{h}^2 + 3\bar{h} + 2)}{(1 + \bar{E}^2\bar{h})(1 + \bar{h})^3} \cdot \frac{\bar{E}_{film}(h_{int} + h_{film})^3}{12}\right]\frac{d^4w}{dx^4} \tag{1}$$

$$\tau_c = (\bar{E}_{film}h_{film} + \bar{E}_{int}h_{int})\frac{d^2u}{dx^2} \tag{2}$$

其中，u 和 w 分别为复合梁面内位移和挠度。

1.2　弹性梯度基底的表面位移

如图 1(b)所示，三层结构发生周期性屈曲。因此假设器件层与梯度基底界面处应力为

$$\sigma_c = \sigma_0\cos(kx) \tag{3}$$

$$\tau_c = \tau_0\sin(kx) \tag{4}$$

其中：σ_0 和 τ_0 分别为双层膜与基底界面间正应力和剪切力的幅值；$k = 2\pi/\lambda$ 为未知的波数，λ 为波长。

器件层与半无限大弹性梯度基底界面处位移弹性梯度基底的表面位移表示为[25]

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) = 2k^{\beta-1}[\sigma_0B_1c_2 + \tau_0D_1c_1]\cos(kx) \tag{5}$$

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = 2k^{\beta-1}[-\sigma_0B_2c_1 + \tau_0D_2c_2]\sin(kx) \tag{6}$$

其中

$$B_1 = b_1/\bar{E}_{s0}, \quad B_2 = b_2/\bar{E}_{s0}, \quad D_1 = -d_1/\bar{E}_{s0},$$

$$D_2 = d_2/\bar{E}_{s0}, \quad b_1 = \frac{qC}{(1 + \beta)\beta}\sin\left(\frac{\pi q}{2}\right),$$

$$b_2 = d_1 = \frac{C}{\beta}\cos\left(\frac{\pi q}{2}\right), \quad d_2 = \frac{(1 + \beta)C}{q\beta}\sin\left(\frac{\pi q}{2}\right),$$

chinaXiv:202303.00354v1

$$q=\sqrt{(1+\beta)[(1-\beta\nu_s)/(1-\nu_s)]},$$

$$C=\frac{2^{1+\beta}}{\pi\Gamma(2+\beta)}\Gamma\left(\frac{3+\beta+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+\beta-q}{2}\right),$$

$$c_1=\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\Gamma(1-\beta),$$

$$c_2=\sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\Gamma(1-\beta)$$

其中 Γ 为 Gamma 函数。

1.3 求解临界压缩应变和失稳波长

为了得到三层结构的临界压缩应变和失稳波长，将式(5)和式(6)代入到式(1)和式(2)中，得到如下特征方程。

$$\left[b_1c_2+\frac{\bar{E}_{s0}}{k^{\beta+1}}\left(\begin{gathered}\frac{1+\bar{E}^2\bar{h}^4+2\bar{E}\bar{h}(2\bar{h}^2+3\bar{h}+2)}{6(1+\bar{E}^2\bar{h})(1+\bar{h})^3}\cdot\\ \bar{E}_{film}(h_{film}+h_{int})^3k^2+\\ 2\varepsilon_a(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})\end{gathered}\right)\right]\sigma_0-c_1d_1\tau_0=0 \quad (7)$$

$$\left(d_2c_2+\frac{\bar{E}_{s0}}{2(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})k^{\beta+1}}\right)\tau_0-b_2c_1\sigma_0=0 \quad (8)$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Qp}=\boldsymbol{0} \quad (9)$$

其中，$\boldsymbol{p}=[\sigma_0 \quad \tau_0]^{\mathrm{T}}$ 由正应力和剪切力组成；矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix},$$

$$Q_{11}=\frac{b_1c_2k^{\beta+1}+\bar{E}_{s0}}{k^{\beta+1}}\left(\begin{gathered}\frac{1+\bar{E}^2\bar{h}^4+2\bar{E}\bar{h}(2\bar{h}^2+3\bar{h}+2)}{6(1+\bar{E}^2\bar{h})(1+\bar{h})^3}\cdot\\ \bar{E}_{film}(h_{film}+h_{int})^3k^2+\\ 2\varepsilon_a(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})\end{gathered}\right)^{-1},$$

$$Q_{12}=-c_1d_1,\quad Q_{21}=-c_1b_2,$$

$$Q_{22}=c_2d_2+\frac{\bar{E}_{s0}}{2(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})k^{\beta+1}}$$

特征方程(9)存在非平凡解，即 $|\boldsymbol{Q}|=0$。根据第 6 点假设，复合梁的等效杨氏模量远大于基底的杨氏模量系数，即 $\bar{E}_{s0}/(2(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})k^{\beta+1})$ 为高阶小量。因此可以得到三层结构的外加应变与波数之间的关系式为

$$\varepsilon_a=\left[\begin{gathered}\frac{1+\bar{E}^2\bar{h}^4+2\bar{E}\bar{h}(2\bar{h}^2+3\bar{h}+2)}{12(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})(1+\bar{E}^2\bar{h})(1+\bar{h})^3}\cdot\\ \bar{E}_{film}(h_{film}+h_{int})3k^2\end{gathered}\right]+\frac{\bar{E}_{s0}}{(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})k^{\beta+1}}\cdot\frac{\Delta}{\gamma} \quad (10)$$

其中，$\Delta=\dfrac{(1+\beta)\beta}{2qC\Gamma(1-\beta)\sin(\pi\beta/2)\sin(\pi q/2)}$，$\gamma=1-\dfrac{1}{\tan^2(\pi q/2)\tan^2(\pi\beta/2)}$。

为了求解临界波数，令 $\partial\varepsilon_a/\partial k=0$。临界波数 k_w 及其相应的失稳波长 λ_w 可以表示为

$$k_w=\left[\frac{6\bar{E}_{s0}\Delta(1+\beta)(1+\bar{E}^2\bar{h})(1+\bar{h})^3}{\gamma\left(\begin{gathered}1+\bar{E}^2\bar{h}^4+2\bar{E}\bar{h}\cdot\\ (2\bar{h}^2+3\bar{h}+2)\end{gathered}\right)\bar{E}_{film}(h_{film}+h_{int})^3}\right]^{1/(3+\beta)},$$

$$\lambda_w=2\pi(h_{film}+h_{int})\left[\frac{\gamma\left(\begin{gathered}1+\bar{E}^2\bar{h}^4+\\ 2\bar{E}\bar{h}(2\bar{h}^2+3\bar{h}+2)\end{gathered}\right)\bar{E}_{film}}{\begin{gathered}6\bar{E}_{s0}(1+\bar{E}^2\bar{h})(1+\bar{h})^3\\ \Delta(1+\beta)(h_{film}+h_{int})^{\beta}\end{gathered}}\right]^{1/(3+\beta)} \quad (11)$$

再将式(11)回代入式(10)，方程式(10)的临界压缩应变 ε_w 可表示为

$$\varepsilon_w=\left[\begin{gathered}\frac{1+\bar{E}^2\bar{h}^4+2\bar{E}\bar{h}(2\bar{h}^2+3\bar{h}+2)}{12(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})(1+\bar{E}^2\bar{h})(1+\bar{h})^3}\cdot\\ \bar{E}_{film}(h_{film}+h_{int})3k_w^2\end{gathered}\right]+\frac{\bar{E}_{s0}}{(\bar{E}_{film}h_{film}+\bar{E}_{int}h_{int})k^{\beta+1}}\frac{\Delta}{\gamma} \quad (12)$$

2 数值仿真及分析

2.1 线性屈曲分析

为了研究弹性梯度基底上双层薄膜结构的屈曲特性，分析三层结构的几何参数和材料参数对临界应变及波长的影响，验证本研究理论分析的有效性，

chinaXiv:202303.00354v1

ChinaXiv合作期刊

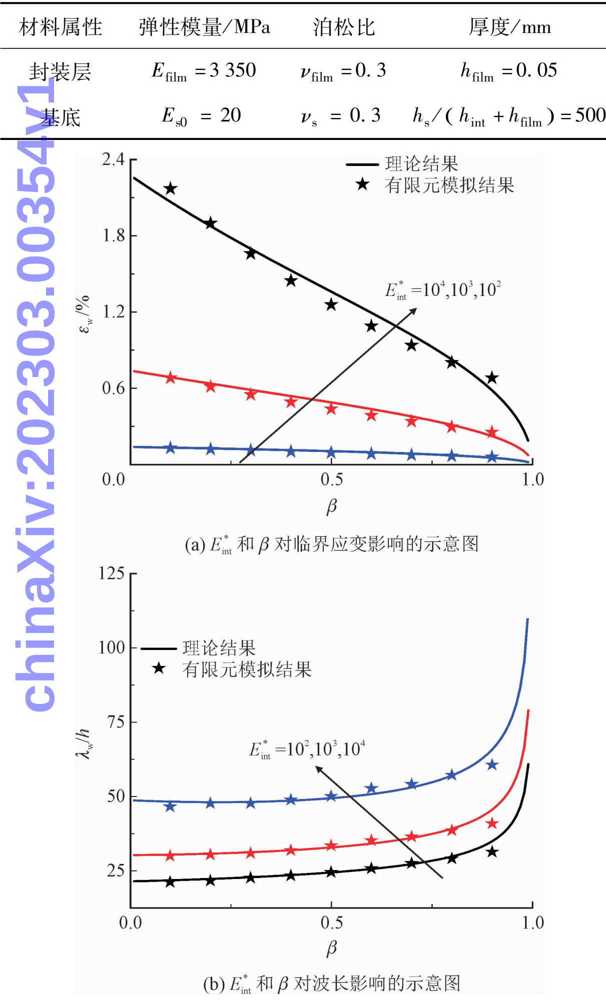
本节通过数值仿真进行研究讨论,使用的参数如表 1 所示。

本研究采用商用有限元软件 ABAQUS 进行数值仿真。三层结构模型全部采用 CPE8R 单元进行网格划分,总单元总数约 4 万个。针对于弹性梯度基底的建模,使用 FORTRAN 语言对 ABAQUS 进行二次开发,并通过 UMAT 接口导入 JOB 计算。分析分为两步:①得到初始失稳模态的线性摄动分析;②引入小缺陷的后屈曲分析。

表 1 封装层、弹性梯度基底的材料及几何参数[22]

Tab. 1 Material and geometric parameters of encapsulation layer and elastic gradient base[22]

材料属性	弹性模量/MPa	泊松比	厚度/mm
封装层	$E_{film}=3\ 350$	$\nu_{film}=0.3$	$h_{film}=0.05$
基底	$E_{s0}=20$	$\nu_s=0.3$	$h_s/(h_{int}+h_{film})=500$



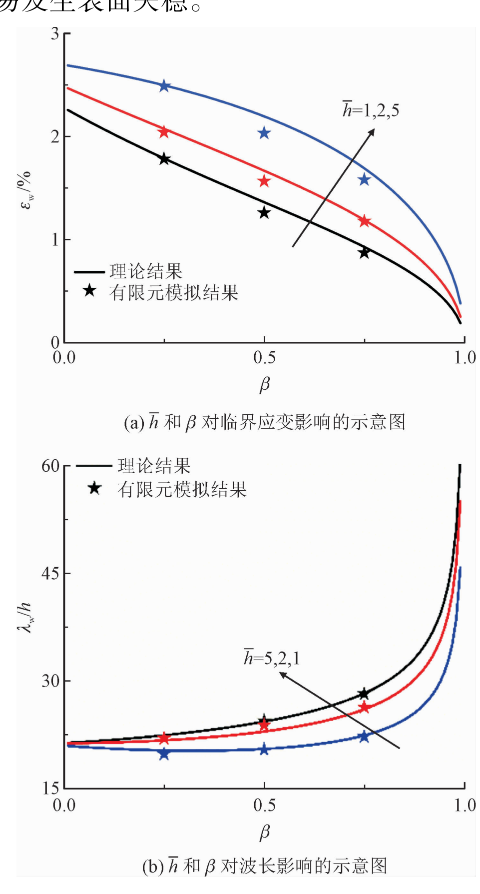
(a) E^*_{int} 和 β 对临界应变影响的示意图

(b) E^*_{int} 和 β 对波长影响的示意图

图 2 器件层与梯度基底的弹性模量比 E^*_{int} 和基底参数 β 对屈曲结构的临界应变和波长影响

Fig. 2 Effects of elastic modulus ratio E^*_{int} and substrate parameter β on critical strain and wavelength of buckling structure

首先讨论梯度基底参数对屈曲三层结构的临界应变和波长的影响规律,如图 2 所示。观察图 2,可以发现:器件层与梯度基底的弹性模量比对屈曲结构的临界应变和波长有着显著的影响。当给定 β,器件层与梯度基底的弹性模量比 E^*_{int} 越大,临界应变越小;而失稳波长的变化趋势与之相反。而当给定 E^*_{int},随着基底参数 β 的增加,应变临界值减小;失稳波长的变化趋势缓慢上升。研究结果表明:通过降低器件弹性模量或增大梯度基底杨氏模量能够提高临界应变,进而能够提高双层膜/弹性梯度基底结构的稳定性。通过图 2 的分析,可知:在 $\beta=0$ 时,系统发生失稳的临界应变最大,且临界应变随基底的弹性梯度常数的增加而降低。因此,与薄膜/均匀基底系统[24]相比,由弹性梯度基底组成的三层结构更容易发生表面失稳。



(a) $\bar{h}$ 和 β 对临界应变影响的示意图

(b) $\bar{h}$ 和 β 对波长影响的示意图

图 3 器件层与封装层的厚度比 $\bar{h}$ 和基底参数 β 对屈曲三层结构临界应变和波长的影响

Fig. 3 Effects of thickness ratio $\bar{h}$ and substrate parameter β on critical strain and wavelength of buckling structure

图 3 讨论了器件层与封装层的厚度比对屈曲三层结构临界应变和波长的影响。在图 3 的数值分析中,器件层与梯度基底的弹性模量比 $E^*_{int}=10^2$,由图 3 的数值结果可以发现:当取定 β 时,器件层与封装层的厚度比越大,临界应变越大;而波长变化趋势与之相反。对于波纹结构的可延展电子器件,可以

chinaXiv:202303.00354v1

通过减小器件层的厚度或者增加封装层的厚度，增大屈曲临界应变，进而实现系统稳定性的提升。对比图 2 和图 3 所示的临界应变和失稳波长所得解析结果与有限元模拟结果，可以发现两者吻合很好，从而验证了本研究模型和分析的合理性。

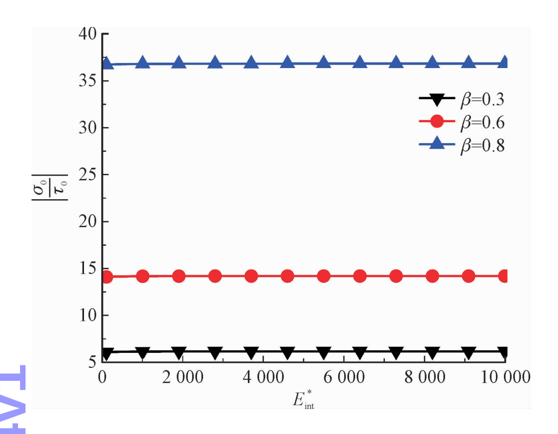


图 4 应力幅值比 $|\sigma_0/\tau_0|$ 与弹性模量比 E_{int}^* 的关系图，$\bar{h}=1$

Fig. 4 The relationship between stress amplitude ratio $|\sigma_0/\tau_0|$ and elastic modulus ratio E_{int}^* , $\bar{h}=1$

为了定量分析界面三层结构剪切力对泊松比较小的软材料表面屈曲失稳的影响，本研究利用式(8)，给出了三层结构界面应力与剪切力之比为

$$\left|\frac{\sigma_0}{\tau_0}\right| = \left|\frac{d_2c_2 + \bar{E}_{s0}/[2(\bar{E}_{\text{film}}h_{\text{film}} + \bar{E}_{\text{int}}h_{\text{int}})k^{\beta+1}]}{b_2c_1}\right| \tag{13}$$

图 4 描述了弹性模量比与应力幅值比的关系，其中封装层的厚度与器件层的厚度相同。观察图 4，可以发现：随着器件层与弹性梯度弹性模量比的增加，$|\sigma_0/\tau_0|$ 几乎保持不变；取定器件层与弹性梯度弹性模量比，基底参数 β 越大，$|\sigma_0/\tau_0|$ 越大。同时，从图 4 还可以发现，$|\sigma_0/\tau_0|$ 总是大于 1。这一现象表明：当器件层与弹性梯度基底的杨氏模量比越大，界面处的剪切力越大。

图 5 给出了不同器件层与封装层的厚度比下 $|\sigma_0/\tau_0|$ 随 E_{int}^* 的变化关系曲线，其中 $\beta=0.5$ 。观察图 5 可以看出：当给定器件层与梯度基底的弹性模量比时，器件层与封装层的厚度比越大，应力幅值比越大，界面处的剪切力越小。这一现象表明：为保证功能器件正常工作，封装层的厚度一定时，为使界面剪切力的影响达到要求，可以考虑增大器件层的厚度。

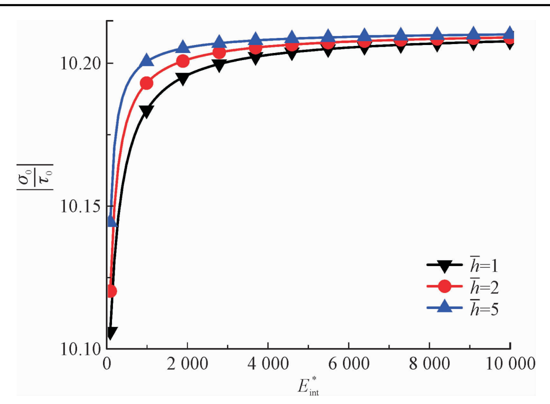


图 5 应力幅值比 $|\sigma_0/\tau_0|$ 与弹性模量比 E_{int}^* 的关系图，$\beta=0.5$

Fig. 5 The relationship between stress amplitude ratio $|\sigma_0/\tau_0|$ and elastic modulus ratio E_{int}^* , $\beta=0.5$

2.2 后屈曲分析

根据前文的线性屈曲分析结果，得到了临界屈曲应变。当外加压缩应变较小时，即 $\varepsilon_a < \varepsilon_w$ ，薄膜基底系统表面的平衡状态为平坦状态，即 $A=0$ ，其中 A 为三层结构失稳波幅；当外加压缩应变大于临界应变时，即 $\varepsilon_a > \varepsilon_w$ ，系统表面呈现正弦波形状，波幅 A 随着外加压缩应变缓慢上升。由于外加压缩应变较小，在双层薄膜-弹性梯度基底系统后屈曲过程中一直保持正弦形式波纹形貌。

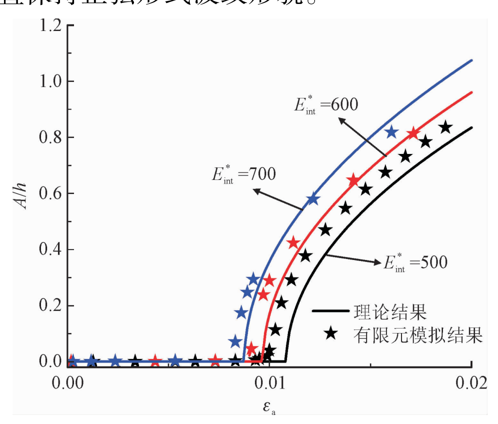


图 6 无量纲振幅 A/h 与外加应变 ε_a 的关系图，$\bar{h}=1$

Fig. 6 The relationship between dimensionless amplitude A/h and applied strain ε_a , $\bar{h}=1$ 。

从图 6～8 可以看出 E_{int}^* 、$\bar{h}$和 β 对无量纲振幅 A/h 的影响不尽相同。在相同的外加应变 ε_a 下，A/h随着 E_{int}^*、$\bar{h}$和 β 的增加而增加。观察图 6、图 7 可知：当器件层的杨氏模量越小，厚度越小时，即器件层越“软”、越“薄”时，系统需要释放更多的能量来激发表面失稳。观察图 8 可知：当系统的表面模量较大，尽管基底材料常数 β 发生变化，系统正弦形

chinaXiv:202303.00354v1

ChinaXiv合作期刊

貌的演化路径相对稳定,波幅变化并不明显,说明双层薄膜的抗压性能良好。结合前文基底常数越大,系统越容易发生失稳的结论,可以预见使用弹性梯度材料作为基底激发的表面失稳在表面自组装等领域将具有广阔的应用前景。

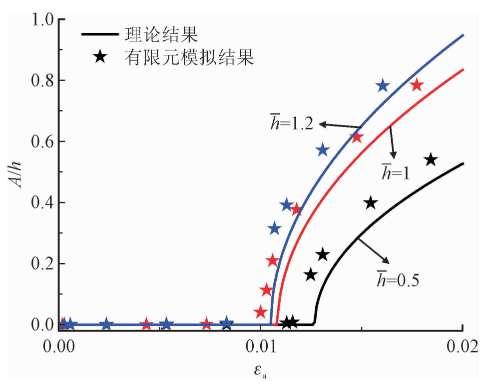


图 7　无量纲振幅 A/h 与外加应变 ε_a 的关系图, $\beta = 0.25$

Fig. 7　The relationship between dimensionless amplitude A/h and applied strain ε_a , $\beta = 0.25$

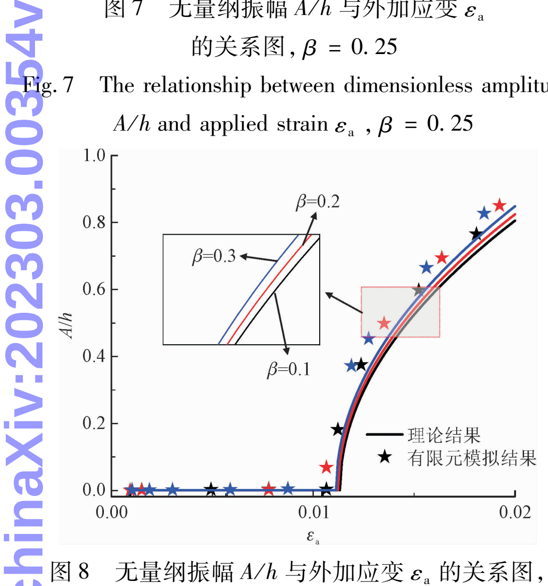


图 8　无量纲振幅 A/h 与外加应变 ε_a 的关系图, $E_{int}^* = 500$

Fig. 8　The relationship between dimensionless amplitude A/h and applied strain ε_a , $E_{int}^* = 500$

3　结　论

针对弹性梯度基底上硬质封装层与器件层的屈曲问题,本文将硬质封装层与器件层建模为复合梁,并采用 von Karman 非线性梁理论建立了复合梁的控制方程;采用平面应变理论得到了器件层与梯度基底界面处的位移。利用位移协调条件,通过求解特征值问题,得到了三层结构的临界应变和失稳波长的解析表达式,并讨论了器件层与梯度基底的弹性模量比、器件层与封装层的厚度比及梯度基底材料常数对于临界应变和失稳波长的影响。通过理论解析结果与有限元数值仿真结果进行对比,本研究解析表达式的有效性得到验证。主要结论如下。

1)随着弹性梯度基底的材料参数 β 的增加,临界应变 ε_w 减小,而失稳波长 λ_w 增加;随着器件层与封装层的厚度比 $\bar{h}$ 的增加,临界应变 ε_w 增大,而失稳波长 λ_w 减小。即通过降低弹性梯度基底的材料参数 β 或者增加器件层的厚度或者减小封装层的厚度,可以提高临界应变 ε_w ,进而提高双层膜/弹性梯度基底结构的稳定性。

2)当器件层与弹性梯度基底的杨氏模量比越大,界面处的剪切力越大。随着器件层与封装层的厚度比 $\bar{h}$ 的增加,应力幅值比 $|\sigma_0/\tau_0|$ 增加;同时,随着基底参数 β 的增加, $|\sigma_0/\tau_0|$ 也随之增加。即当弹性梯度材料基底表面"较软"或器件层"较硬"时,器件层与基底界面的剪切力的影响较大。

本研究建立的双层薄膜-弹性梯度基底模型,以及相关几何和材料参数对临界应变和失稳波长影响的分析,将对提高延展性柔性电子器件的稳定性设计具有重要意义。

参考文献:

[1]　冯雪,陆炳卫,吴坚,等. 可延展柔性无机微纳电子器件原理与研究进展[J]. 物理学报,2014,63(1):014201.
FENG Xue,LU Bingwei,WU Jian,et al. Review on stretchable and flexible inorganic electronics[J]. Acta physica Sinica,2014,63(1):014201(in Chinese).

[2]　常若菲,张一慧,宋吉舟. 可延展结构的设计及力学研究新进展[J]. 固体力学学报,2016,37(2):95-106.
CHANG Ruofei,ZHANG Yihui,SONG Jizhou. Recent advances in mechanics of stretchable designs[J]. Chinese journal of solid mechanics,2016,37(2):95-106(in Chinese).

[3]　倪勇,刘佩琳,马龙,等. 基底上薄膜结构的非线性屈曲力学进展[J]. 固体力学学报,2018,39(2):113-138.
NI Yong,LIU Peilin,MA Long,et al. Nonlinear buckling mechanics of film-substrate systems: recent progress[J]. Chinese journal of solid mechanics,2018,39(2):113-138(in Chinese).

[4]　JIANG Hanqing,KHANG D Y,FEI Huiyang,et al. Finite width effect of thin-films buckling on compliant substrate: experimental and theoretical studies[J]. Journal of the mechanics and physics of solids,2008,56(8):2585-2598.

[5]　LEJEUNE E,JAVILI A,LINDER C. An algorithmic approach to multi-layer wrinkling[J]. Extreme mechanics letters,2016,7:10-17.

[6]　郑宁,黄银,赵骞,等. 面向柔性电子的形状记忆聚合物[J]. 中国科学(物理学 力学 天文学),2016,46(4):044602.

chinaXiv:202303.00354v1

chinaXiv:202303.00354v1

ZHENG Ning, HUANG Yin, ZHAO Qian, et al. Shape memory polymers for flexible electronics[J]. Scientia Sinica (physica, mechanica & astronomica), 2016, 46(4): 044602(in Chinese).

[7] 李学通,仝洪月,赵越,等. 柔性器件基底预应变和各参数对蛇形结构延展性的影响[J]. 应用力学学报,2015,32(2):251-255.

LI Xuetong, TONG Hongyue, ZHAO Yue, et al. Effect of substrate prestrain and parameters on serpentine structure stretchability for flexible device[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2015, 32(2): 251-255(in Chinese).

[8] 张华,周星德,单建. 薄膜结构的几何非线性分析[J]. 应用力学学报,2004,21(2):106-109.

ZHANG Hua, ZHOU Xingde, SHAN Jian. Geometrically nonlinear analysis of membrane structures[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2004, 21(2): 106-109(in Chinese).

[9] 邱俊杰,李荣佳. 薄膜基底结构界面裂纹应力和电场集中因子分析[J]. 应用力学学报,2020,37(3):1276-1282.

QIU Junjie, LI Rongjia. Analysis of interfacial crack stress and electric field concentration interface factors in a film substrate structure[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(3): 1276-1282(in Chinese).

[10] HUANG Z Y, HONG W, SUO Z. Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2005, 53(9): 2101-2118.

[11] HUANG R. Kinetic wrinkling of an elastic film on a viscoelastic substrate[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2005, 53(1): 63-89.

[12] CHEN X, HUTCHINSON J W. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates[J]. Journal of applied mechanics, 2004, 71(5): 597-603.

[13] AUDOLY B, BOUDAOUD A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—part i: Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2008, 56(7): 2401-2421.

[14] AUDOLY B, BOUDAOUD A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—part ii: A global scenario for the formation of herringbone pattern[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2008, 56(7): 2422-2443.

[15] AUDOLY B, BOUDAOUD A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—part iii: Herringbone solutions at large buckling parameter[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2008, 56(7): 2444-2458.

[16] CAI S, BREID D, CROSBY A J, et al. Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2011, 59(5): 1094-1114.

[17] JIA F, ZHENG X P, CAO Y P, et al. Theoretical study on the bilayer buckling technique for thin film metrology[J]. Computers, materials & continua, 2010, 18(2): 105-120.

[18] JIA F, CAO Y P, LIU T S, et al. Wrinkling of a bilayer resting on a soft substrate under in-plane compression[J]. Philosophical magazine, 2012, 92(12): 1554-1568.

[19] CHEN Y L, LIAO X B, ZHAO W, et al. Post-wrinkling behaviors of a bilayer on a soft substrate[J]. International journal of solids and structures, 2021, 214/215: 74-79.

[20] ZHANG T. Symplectic analysis for wrinkles: A case study of layered neo-Hookean structures[J]. Journal of applied mechanics, 2017, 84(7): 071002.

[21] LEE D, TRIANTAFYLLIDIS N, BARBER J R, et al. Surface instability of an elastic half space with material properties varying with depth[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2008, 56(3): 858-868.

[22] CAO Y P, JIA F, ZHAO Y, et al. Buckling and post-buckling of a stiff film resting on an elastic graded substrate[J]. International journal of solids and structures, 2012, 49(13): 1656-1664.

[23] CHEN Z, CHEN W Q, SONG J Z. Buckling of a stiff thin film on an elastic graded compliant substrate[J]. Proceedings of the royal society a: mathematical, physical and engineering sciences, 2017, 473(2208): 20170410.

[24] MEI H X, LANDIS C M, HUANG R. Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates[J]. Mechanics of materials, 2011, 43(11): 627-642.

[25] MURAVSKII G B. Response of an elastic half-space with power-law nonhomogeneity to static loads[J]. Archive of applied mechanics, 2008, 78(12): 965-987.

(编辑　张璐)